

## Sugestões de Questões para a OMU

**Questão 1** Um pedaço de barbante de comprimento  $L$  é cortado em duas partes, uma delas sendo dobrada na forma de um triângulo equilátero e a outra parte dobrada na forma de uma circunferência. Determine como deve ser cortado o barbante para que a soma das áreas das duas figuras geométricas seja

(a) a **maior** possível.

(b) a **menor** possível.

**Questão 2** Em um supermercado estão latas de creme de chocolate na forma de cilindros circulares retos de dois tamanhos. A primeira lata é duas vezes mais alta que a segunda lata, mas a segunda lata tem um diâmetro duas vezes maior que a primeira lata. Se a segunda lata custa duas vezes mais que a primeira lata, qual delas é mais vantajoso comprar? Justifique sua resposta.

**Questão 3** Considere os seguintes conjuntos

$$X = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad , \quad Y = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 1\} \quad e \quad Z = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

onde  $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$ .

Sejam as funções  $f : X \rightarrow Y$  definida por  $f(x) = x + 1$  e  $g : Y \rightarrow Z$  definida pela regra  $g(x) = x^2 - 1$ . Verifique se a aplicação  $g \circ f$  é uma bijeção entre  $X$  e  $Z$ . Em caso afirmativo, determine a função inversa  $(g \circ f)^{-1} : Z \rightarrow X$ .

**Questão 4** Considere o polinômio  $p(x)$  dado pela regra funcional

$$p(x) = \theta x(\sigma - x)(\mu - x)^2,$$

com  $\theta > 0$  e  $\mu > \sigma > 0$ . Esboce o gráfico do polinômio  $p(x)$  para todo  $x \geq 0$ .

**Questão 5** Determine dois números reais positivos cuja soma seja  $S$  e cujo produto seja o maior possível. Dê uma interpretação geométrica.



**Questão 6** Determine as soluções do seguinte sistema de equações algébricas

$$\begin{cases} -x + y = -1 \\ 2x^2 - y = 4x \end{cases}$$

Dê uma interpretação geométrica para o conjunto solução.

**Questão 7** Sejam  $x$  e  $y$  números reais tais que

$$x^2 + y = 1.$$

Determine o **valor mínimo** da variável  $z$  dada por:

$$z = x^2 + y^2.$$

**Questão 8** Um silo tem o formato de um cilindro circular reto com um topo no formato de metade de uma esfera. Se a altura total do silo é de  $32\text{ m}$  e o volume total é de  $1080\pi\text{ m}^3$ , determine o raio do cilindro, sabendo que

$$V_e = \frac{4\pi r^3}{3} \quad e \quad V_c = \pi r^2 h,$$

onde  $V_e$  é o volume da esfera e  $V_c$  é o volume do cilindro circular reto, com  $r$  o raio da esfera e  $h$  a altura do cilindro. Esse problema tem solução única? Justifique sua resposta.

**Questão 9** Ao chegar a um aeroporto, um turista informou-se sobre locação de automóveis e organizou as informações apresentadas na tabela abaixo.

<b>Opções</b>	<b>Diária</b>	<b>Preço por km rodado</b>
Locadora A	R\$ 90,00	R\$ 0,40
Locadora B	R\$ 60,00	R\$ 0,80
Locadora C	R\$ 160,00	quilometragem livre

- (a) Determine a regra que define o preço da locação em função da quantidade de quilômetros rodados em cada uma das locadoras.
- (b) A partir de quantos quilômetros rodados deve o cliente preferir a Locadora A ao invés da Locadora B?
- (c) A partir de quantos quilômetros rodados deve o cliente preferir a Locadora C?



**Questão 10** Em um vasilhame com capacidade para um litro, preparamos uma mistura de 32 mL de uma certa substância tóxica e água pura. Considere o seguinte processo, retiramos 250 mL de água contaminada do vasilhame e colocamos 250 mL de água pura no vasilhame. Repetindo esse processo quatro vezes, quantos mililitros da substância tóxica restam no vasilhame?

**Questão 11** Considere um sorteio de amigo secreto com  $N$  pessoas.

(a) Quantos sorteios distintos existem?

(b) Considerando  $N = 5$ , do total de sorteios possíveis, quantos são aqueles em que nenhuma pessoa sorteou a si mesma?

**Questão 12** Uma seqüência de Fibonacci é uma seqüência de números reais

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

na qual os dois primeiros termos,  $a_1$  e  $a_2$ , são escolhidos arbitrariamente e os termos seguintes são determinados como sendo a soma dos dois termos anteriores, isto é,

$$a_3 = a_1 + a_2$$

$$a_4 = a_2 + a_3$$

$\vdots$

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

(a) Determine uma seqüência de Fibonacci que tenha o sexto termo,  $a_6$ , igual a 52.

(b) Determine uma seqüência de Fibonacci, distinta da escolhida no item anterior, que também tenha o sexto termo,  $a_6$ , igual a 52, mas cujo primeiro termo,  $a_1$ , seja um número negativo.

**Questão 13** Considere um círculo circunscrito em um quadrado de lado  $L$ .

(a) Determine a área desse círculo.

(b) Se o lado do quadrado sofre um aumento de 20%, determine o aumento na área do círculo.

**Questão 14** Determine os valores do número real  $a$  de modo que a matriz  $A$  dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

seja invertível.

**Questão 15** Considere  $P = (x, y)$  um ponto genérico do plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ , e uma transformação do plano que leva o ponto  $P$  no ponto  $P' = (x', y')$  dada da seguinte forma:

$$x' = ax + by$$

$$y' = cx + dy$$

Sabendo que o triângulo  $ABC$  de vértices

$$A = (2, 1) \quad , \quad B = (2, 3) \quad e \quad C = (3, 3)$$

foi transformado, pela transformação definida acima, no triângulo  $A'B'C'$  de vértices

$$A' = (1, -4) \quad , \quad B' = (3, -4) \quad e \quad C' = (3, -6) \quad ,$$

determine os parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  que definem essa transformação do plano.

**Questão 16** Determine os valores do número real  $a$  de modo que o sistema linear

$$\begin{cases} ax + y = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ y + az = 0 \end{cases}$$

possua somente a solução trivial, isto é,  $x = y = z = 0$ .

**Questão 17** Determine os números reais  $a$  e  $b$  tais que

$$\sum_{k=0}^{100} i^k = a + bi \quad ,$$

onde  $i = \sqrt{-1}$  é a unidade imaginária.

**Questão 18** *Divide-se um segmento de comprimento  $L$  em três partes iguais e retira-se a parte central. Para cada um dos segmentos restante repete-se o processo, retirando-se suas partes centrais, e assim sucessivamente. Calcular a soma dos comprimentos dos segmentos retirados.*

**Definição 1** *Dois números reais  $a$  e  $b$  estão numa **proporção áurea** quando*

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b},$$

*isto é, quando a razão entre  $a+b$  e  $a$  é a mesma que a razão entre  $a$  e  $b$ .*

**Questão 19** *Um pedaço de Barbante de comprimento  $4L$  é dividido ao meio. Com uma das partes forma-se um quadrado e, com a outra parte forma-se um retângulo áureo, isto é, um retângulo cujos lados estão na proporção áurea. Determine a razão entre a área do retângulo e a do quadrado.*

**Questão 20** *Considere duas seqüências de Fibonacci*

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} \quad e \quad \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}.$$

(a) *Mostre que a soma de duas seqüências de Fibonacci é também uma seqüência de Fibonacci, isto é, a seqüência*

$$\{a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots\}$$

*é uma seqüência de Fibonacci.*

(b) *Mostre que a multiplicação de uma seqüência de Fibonacci por um escalar real é também uma seqüência de Fibonacci, isto é, a seqüência*

$$\{\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n, \dots\}$$

*é uma seqüência de Fibonacci, onde  $\lambda$  é um escalar real.*

**Questão 21** *Um vaso contém 10 bolas idênticas, exceto na cor: quatro são vermelhas e seis são amarelas. Ao acaso retira-se, sucessivamente, três bolas, que vão sendo acumuladas do lado de fora. Qual é a probabilidade que, no final desse processo, tenham sido selecionadas duas bolas amarelas e uma bola vermelha?*

**Questão 22** Represente graficamente e determine a área da região do plano cartesiano cujos pontos satisfazem simultaneamente as seguintes desigualdades

$$\begin{cases} 2x - y \leq 8 \\ x - y \geq 0 \\ x + y \geq 4 \end{cases}$$

Utilize o sistema de coordenadas cartesianas da Figura 1 para fazer a representação da região.

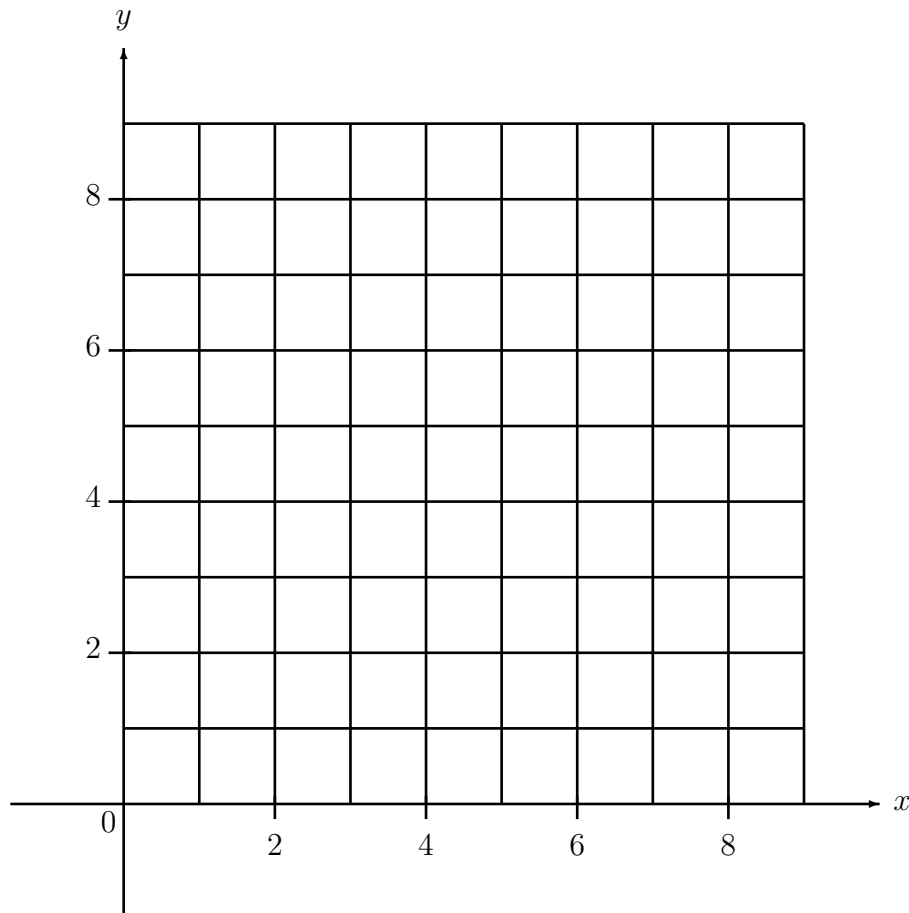


Figura 1: Representação gráfica da região da Questão 22.

**Questão 23** Determine o subconjunto dos números reais que satisfaz a desigualdade

$$\frac{x - 2}{5} + \frac{3 + 1}{3} \geq x .$$

**Questão 24** Determine o subconjunto dos números reais que satisfaz a desigualdade

$$\max\{x + 1, 5 - x\} \geq 2x - 3.$$

**Questão 25** A população brasileira no ano de 2009 é estimada em, aproximadamente, 190 milhões de habitantes. A taxa de natalidade no país é de 2% ao ano. Isto significa que em média nascem no país, em um ano, 2 bebês para cada 100 habitantes. Embora caindo rapidamente nos últimos anos, a taxa de mortalidade infantil ainda é de 20 por mil, indicando que de cada mil crianças nascidas, 20 morrem antes de completar um ano. Nos países socialmente mais desenvolvidos esta taxa é de 5 por mil.

- (a) Quantos crianças nascerão neste ano de 2009 no Brasil?
- (b) Destas, quantas morrerão antes de completar um ano?
- (c) Quantas destas não morreriam se a taxa fosse de 5 por mil?

**Questão 26** A cidade de São Paulo tem 10 milhões de habitantes e o seu consumo médio de água é de 340 litros por habitante por dia. A vazão média do Rio S. Francisco ao longo de um ano é igual a  $1.800 \text{ m}^3/\text{s}$ . O consumo anual total de água da cidade de S. Paulo corresponde a que percentagem da vazão total do Rio S. Francisco em um ano?

**Questão 27** Dois números reais  $a$  e  $b$  estão numa **proporção áurea** quando

$$\frac{a + b}{a} = \frac{a}{b} = \theta,$$

onde a constante positiva  $\theta$  é denominada de **número de ouro**, ou **número áureo**. Determine o valor da constante  $\theta$ .

**Questão 28** Considere a seguinte seqüência de Fibonacci

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots\}.$$

Mostre que o número áureo pode ser aproximado pela divisão do  $n$ -ésimo termo dessa seqüência de Fibonacci pelo termo anterior, isto é,

$$\theta \approx \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Observe que essa aproximação fica cada vez melhor quando tomamos  $n$  cada vez maior.

**Questão 29** Mostre que  $\sqrt{2}$  não é um número racional, isto é, não pode ser escrito na forma

$$\frac{p}{q},$$

onde  $p$  e  $q$  são números inteiros, com  $q \neq 0$ .

**Questão 30** A soma de quatro números pares consecutivos é igual à 140. Determine esses números.

**Questão 31** Determine a equação na forma canônica da reta  $r$  que passa pelo ponto  $P = (1, 2)$  e é perpendicular à reta  $s$  definida pela equação  $3x + y + 1 = 0$ .

**Questão 32** Sejam  $n$  um número natural e o polinômio  $p(x) = x^{n+1} - x^n - 1$ .

(a) Determine o valor de  $n$  de modo que o resto da divisão do polinômio  $p(x)$  por  $x - 2$  seja igual a  $r = 7$ .

(b) Determine o resto da divisão do polinômio  $p(x)$  por  $x + 1$  quando  $n$  é ímpar.

**Questão 33** Determine os valores dos parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  de modo que as funções polinomiais  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas pelas regras funcionais

$$\begin{aligned} p(x) &= (a + b) + (a + b + c)x + (b - c)x^2 \\ q(x) &= 1 + 4x - x^2 \end{aligned},$$

sejam funções polinomiais idênticas.

**Questão 34** Que poliedro tem por vértices os centros das faces de um cubo? Faça um desenho do cubo e do poliedro resultante.

**Questão 35** Que poliedro tem por vértices os centros das faces de um tetraedro regular? Faça um desenho do tetraedro e do poliedro resultante.

**Questão 36** Considere um poliedro convexo de 18 arestas e 10 vértices que possui somente faces triangulares e pentagonais. Determine o número de faces de cada tipo.

**Questão 37** Quantos são os planos determinados por 4 pontos não coplanares no espaço Euclidiano? Justifique sua resposta.

**Questão 38** Cortando-se um cubo por um plano obtemos um hexágono regular conforme Figura 2, onde  $A, B, C, D, E, F$  são pontos médios de arestas. Se o perímetro do hexágono é  $12\sqrt{2}$ , calcular a área da superfície lateral do cubo e a área da secção hexagonal.

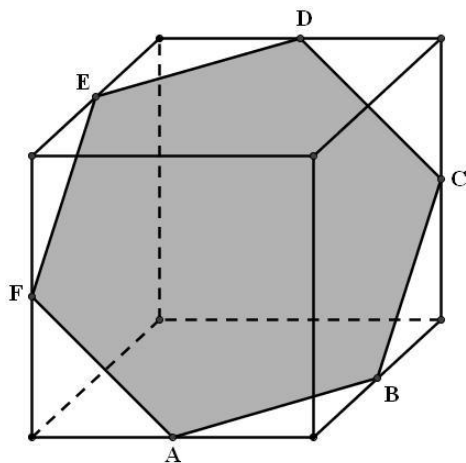


Figura 2: Representação gráfica da Questão 38.

**Questão 39** Na Figura 3, desenhar uma secção pentagonal do cubo.

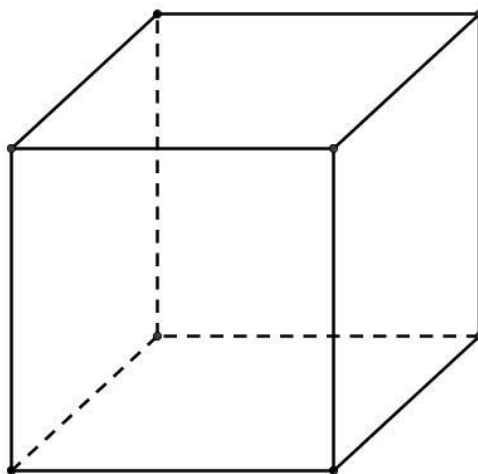


Figura 3: Representação gráfica da Questão 39.

**Questão 40** Considere um octaedro regular  $ABCDEF$  de aresta  $a$ . O octaedro é formado por duas pirâmides iguais cuja base comum é um quadrado de lado  $a$ . Seja  $G$  a projeção do ponto  $E$  na base comum  $ABCD$ , veja Figura 4.

- (a) Calcule a medida do segmento  $AG$ .
- (b) Calcule a medida do segmento  $EG$ .
- (c) Calcule o volume da pirâmide de base quadrangular  $ABCDE$ .
- (d) Calcule o volume do octaedro regular  $ABCDEF$  de aresta  $a$ .

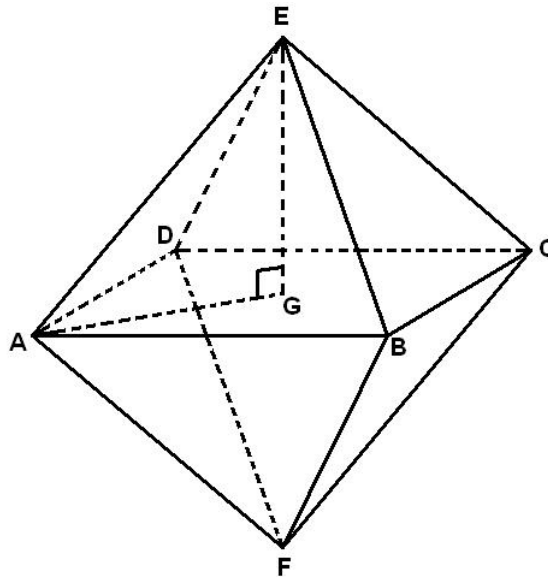


Figura 4: Representação gráfica da Questão 40.

**Questão 41** Determine os planos de simetria das seguintes figuras geométricas:

- (a) tetraedro regular.
- (b) cilindro de revolução.

**Questão 42** A que distância da base de uma pirâmide de altura  $h$  deve ser conduzido um plano paralelo à base de modo que a área da secção determinada seja  $\frac{1}{3}$  da área da base?

**Questão 43** Um tablete de doce de leite medindo 12 cm por 9 cm por 6 cm, está coberto com papel alumínio. Esse tablete é dividido em cubos de 1 cm de aresta, veja Figura 5.

- (a) Quantos desses cubos não possuem nenhuma face coberta com papel alumínio?
- (b) Quantos desses cubos possuem apenas uma face coberta com o papel alumínio?
- (c) Quantos desses cubos possuem exatamente duas faces cobertas com papel alumínio?
- (d) Quantos desses cubos possuem três faces cobertas com papel alumínio?



Figura 5: Representação gráfica da Questão 43.

**Questão 44** Quando duas torneiras atuam em conjunto, enchem um tanque em duas horas. Atuando sozinhas, a segunda torneira gasta uma hora a mais que a primeira torneira para encher o mesmo tanque. Determine o tempo necessário para cada torneira encher o tanque, quando atuando sozinhas.

**Questão 45** Considere os seguintes números reais distintos

$$x_0 = 0 \quad , \quad x_1 = 1 \quad e \quad x_2 = 2 \quad ,$$

determine o polinômio  $p(x)$  de grau  $\leq 2$  que assume nesses pontos os valores

$$p(x_0) = 1 \quad , \quad p(x_1) = -1 \quad e \quad p(x_2) = 1 \quad .$$

**Questão 46** Mostre que todo polinômio de grau ímpar possui ao menos um zero real, isto é, existem números reais  $x_1$  e  $x_2$  tais que  $p(x_1) < 0$  e  $p(x_2) > 0$ .

**Questão 47** Dadas as matrizes

$$X = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -1 & b & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad Z = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Determine os valores dos parâmetros  $a$  e  $b$  tal que  $YX = 0$  e  $YZ = 1$ .

**Questão 48** Determine um número real  $\lambda$  tal que  $AX = \lambda X$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Esse problema possui solução única? Justifique sua resposta.

**Questão 49** Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função crescente e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função decrescente. Mostre que a função  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida pela regra  $h(x) = (f \circ g)(x)$  é uma função decrescente.

**Questão 50** Sejam  $X, Y$  subconjuntos de  $\mathbb{R}$  e  $f : X \rightarrow Y$  uma bijeção e crescente em  $X$ . Então, a função inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  é uma função crescente em  $Y$ .