Gabarito da Prova da Primeira Fase

Questão 1 *Considere um pedaço de barbante com* $60\,cm$ *de comprimento, que é cortado em duas partes. Uma das partes é dobrada na forma de um quadrado, e a outra parte é dobrada na forma de uma circunferência. Determine como deve ser cortado o barbante para que a soma das áreas das duas figuras geométricas seja*

(a) a ***maior*** *possível.*

(b) a ***menor*** *possível.*

Resolução

Denotamos por x o comprimento da parte que será dobrada na forma de um quadrado e por y o comprimento da parte que será dobrada na forma de uma circunferência, isto é,

$$60 = x + y \iff y = 60 - x .$$

Desse modo, a área do quadrado é dada por:

$$A_{\square} = \frac{x^2}{16} . \tag{1}$$

O raio da circunferência, que vamos indicar por R, é expresso da forma:

$$R = \frac{60 - x}{2\pi} , \tag{2}$$

uma vez que o perímetro da circunferência é $60 - x = 2\pi R$.

Desse modo, temos que a área da circunferência é dada por:

$$A_{\bigcirc} = \pi R^2 = \frac{(60 - x)^2}{4\pi} . \tag{3}$$

Portanto, a área total das figuras, que vamos denotar por A_T, é dada por:

$$A_T(x) = A_{\square} + A_{\bigcirc} = \frac{x^2}{16} + \frac{(60 - x)^2}{4\pi} \quad , \quad 0 \leq x \leq 60 , \tag{4}$$

que está em função do comprimento x, e depende do comprimento do barbante $60\,cm$.

Note que a área total é uma função quadrática na variável x, que podemos escrever da seguinte forma:

$$A_T(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{3600 - 120x + x^2}{4\pi} \tag{5}$$

para $0 \leq x \leq 60$.

Finalmente, vamos analisar este problema escrevendo a função quadrática A_T dada na equação (5) da seguinte forma:

$$A_T(x) = ax^2 + bx + c \,,$$

onde

$$a = \frac{4 + \pi}{16\pi} \quad , \quad b = -\frac{30}{\pi} \quad \text{e} \quad c = \frac{900}{\pi} \,.$$

Como $a > 0$, sabemos que a função quadrática A_T assume seu valor mínimo no ponto

$$x^\star = -\frac{b}{2a} = \frac{240}{4 + \pi}\, cm \,, \tag{6}$$

que é o comprimento da parte que será dobrada na forma de um quadrado.

Desse modo, a parte do barbante de comprimento $y^\star$, que será dobrada na forma de uma circunferência, é dada por:

$$y^\star = 60 - x^\star = 60 - \frac{240}{4 + \pi} = \frac{60\pi}{4 + \pi}\, cm \,. \tag{7}$$

Portanto, considerando o corte do barbante da forma:

$$x^\star + y^\star = 60\, cm \,,$$

temos uma área total mínima.

Da equação (4), que fornece a área total, temos que

$$A_T(x = 0) > A_T(x = 60)$$

Assim, a área máxima é obtida dobrando o barbante de comprimento $60\, cm$ na forma de uma circunferência. Note que o resultado está de acordo com o esperado, pois sabemos que a circunferência tem a maior área entre todas as curvas fechadas de perímetro fixo.

Questão 2 *Divide–se um segmento de comprimento L em três partes iguais e retira–se a parte central. Para cada um dos segmentos restantes repete–se o processo, retirando–se suas partes centrais, e assim sucessivamente.*

(a) Calcule a soma dos comprimentos dos segmentos retirados após 4 passos.

(b) Determine uma expressão para a soma dos comprimentos dos segmentos retirados após n passos.

Resolução Vamos descrever o processo através da tabela abaixo:

Passo	Segmentos Retirados	Segmentos Restantes	Medida de cada Segmento
1	1	2	$\frac{L}{3}$
2	2	4	$\frac{L}{3^2}$
3	4	8	$\frac{L}{3^3}$
4	8	16	$\frac{L}{3^4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	2^{n-1}	2^n	$\frac{L}{3^n}$

Por simplicidade, vamos denotar por S_4 a soma das medidas dos segmentos retirados na quarto passo. Assim, temos que S_4 é dado por:

$$S_4 = \frac{L}{3} + 2\frac{L}{3^2} + 4\frac{L}{3^3} + 8\frac{L}{3^4} = \frac{L}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27}\right) = \frac{65}{81}L\,.$$

Podemos observar que o somatório que está entre parênteses é a soma dos quatro primeiro termos de uma **progressão geométrica** com primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $r = \frac{2}{3}$.

De modo análogo, denotando por S_n a soma das medidas dos segmentos retirados no passo n. Portanto, temos que S_n é dado por:

$$S_n = \frac{L}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right) = \frac{L}{3}\left(a_1\frac{1 - r^n}{1 - r}\right) = \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)L\,,$$

uma vez que o somatório que está entre parênteses é a soma dos n primeiro termos de uma **progressão geométrica** com primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $r = \frac{2}{3}$.

Observamos que repetindo esse processo indefinidamente, a soma dos comprimentos dos segmentos retirados será igual a L.

Questão 3 *Considere o polinômio* $p(x)$ *dado pela regra funcional*

$$p(x) = x(3 - x)(5 - x).$$

Esboce o gráfico do polinômio $p(x)$ *para todo* x *real.*

Resolução

Inicialmente, observamos que o polinômio $p(x)$ possui três zeros simples, que são

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 3 \quad \text{e} \quad x_3 = 5.$$

Em seguida, vamos fazer uma análise do sinal do polinômio da seguinte forma:

- temos que $p(x) < 0$ para $x < x_1 = 0$
- temos que $p(x) > 0$ para $x_1 < x < x_2 = 3$
- temos que $p(x) < 0$ para $x_2 < x < x_3 = 5$
- temos que $p(x) > 0$ para $x > x_3 = 5$

Com as informações acima, podemos esboçar o gráfico de polinômio $p(x)$, cujo gráfico está ilustrado na Figura 1.

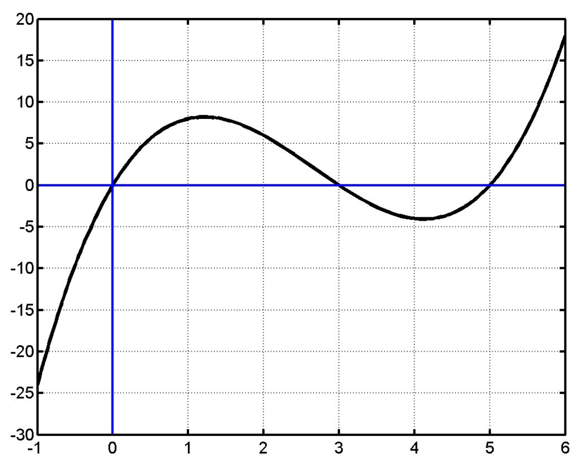

Figura 1: Gráfico do polinômio $p(x)$ da Questão 3.

Questão 4 *Uma seqüência de Fibonacci é uma seqüência de números reais*

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$$

na qual os dois primeiros termos, a_1 *e* a_2*, são escolhidos arbitrariamente e os termos seguintes são determinados como sendo a soma dos dois termos anteriores, isto é,*

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 + a_2 \\ a_4 &= a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-2} + a_{n-1} \end{aligned}$$

(a) Determine uma seqüência de Fibonacci que tenha o sexto termo, a_6*, igual a* 52*.*

(b) Determine uma seqüência de Fibonacci, distinta da escolhida no item anterior, que também tenha o sexto termo, a_6*, igual a* 52*, mas cujo primeiro termo,* a_1*, seja um número negativo.*

Resolução

(a) Considerando a definição da seqüência de Fibonacci, temos

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 + a_2 \\ a_4 &= a_2 + a_3 = a_2 + a_1 + a_2 = a_1 + 2a_2 \\ a_5 &= a_3 + a_4 = (a_1 + a_2) + (a_1 + 2a_2) = 2a_1 + 3a_2 \\ a_6 &= a_4 + a_5 = (a_1 + 2a_2) + (2a_1 + 3a_2) = 3a_1 + 5a_2 \end{aligned}$$

Como $a_6 = 52$, obtemos

$$3a_1 + 5a_2 = 52 ,$$

que é uma equação algébrica nas incógnitas a_1 e a_2. Logo, possui infinitas soluções. Portanto, podemos construir infinitas seqüências de Fibonacci com $a_6 = 52$.

Fazendo, por exemplo, o primeiro termo $a_1 = 4$ obtemos a equação $52 = 12 + 5a_2$. Assim, o segundo termo $a_2 = 8$. Então, uma seqüência de Fibonacci com $a_6 = 52$ é

$$(4, 8, 12, 20, 32, 52, 84, \cdots) .$$

(b) De modo análogo, escolhendo o primeiro termo $a_1 = -1$, obtemos a seguinte seqüência de Fibonacci com $a_6 = 52$, e distinta da obtida no item *(a)*,

$$(-1, 11, 10, 21, 31, 52, 83, \cdots) .$$

Questão 5 *Considere um tetraedro regular, e em cada uma das quatro faces o seu centro. Ligando cada um desses centros aos outros centros restantes, obtemos um novo poliedro contido no tetraedro original. Descreva esse poliedro, e faça um desenho do tetraedro inicial juntamente com o poliedro resultante.*

Resolução

O tetraedro regular possui 4 faces triangulares. Assim, o poliedro terá 4 vértices localizados nos centros de cada uma das faces do tetraedro. Observe que os segmentos tendo por extremidades vértices em faces adjacentes do tetraedro possuem medidas iguais, e estes segmentos formarão as arestas do novo poliedro. Teremos 6 arestas, 4 vértices e 4 faces triangulares (triângulos eqüiláteros). Portanto, O poliedro resultante é um **tetraedro regular**.

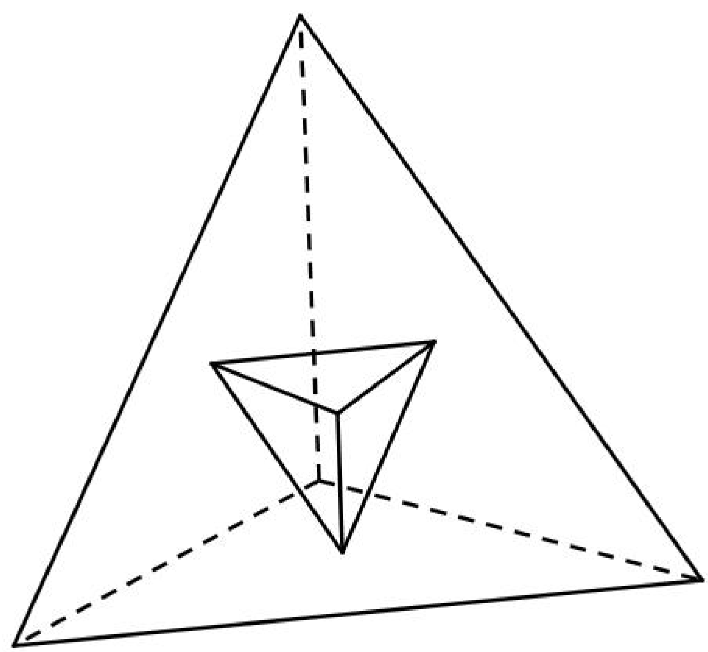

Figura 2: Representação gráfica do poliedro resultante da Questão 5.

Questão 6 *Represente graficamente e determine a área da região do plano cartesiano cujos pontos satisfazem simultaneamente as seguintes desigualdades*

$$\begin{cases} 2x - y \leq 8 \\ x - y \geq 0 \\ x + y \geq 4 \end{cases}$$

Utilize o sistema de coordenadas da Figura 3 para fazer a representação da região.

Resolução

Primeiramente determinamos o gráfico da reta r dada pela equação

$$y = x \,,$$

e verificamos que a região do plano numérico que satisfaz a desigualdade

$$x - y \geq 0$$

é a que está abaixo da reta r, testando o ponto $P = (4,0)$.

Depois, determinamos o gráfico da reta s dada pela equação

$$y = -x + 4 \,,$$

e verificamos que a região do plano numérico que satisfaz a desigualdade

$$x + y \geq 4$$

é a que está acima da reta s, testando o ponto $P = (0,0)$. Em seguida, encontramos o ponto de intersecção das retas r e s, que é o ponto $A = (2,2)$. É importante observar que as retas r e s são perpendiculares, pela análise dos coeficientes angulares.

Em seguida, determinamos o gráfico da reta w dada pela equação

$$y = 2x - 8 \,,$$

e verificamos que a região do plano numérico que satisfaz a desigualdade

$$2x - y \leq 8$$

é a que está acima da reta w, testando o ponto $P = (0,0)$.

Em seguida, encontramos o ponto de intersecção das retas s e w, que é o ponto $B = (4,0)$, e o ponto de intersecção das retas r e w, que é o ponto $C = (8,8)$.

Assim, obtemos a região procurada que é a região limitada pelo triângulo ABC.

Como as retas r e s são perpendiculares, consideramos como base o lado AC, cujo comprimento é igual a $6\sqrt{2}\,uc$, e como altura o lado AB, cujo comprimento é igual a $2\sqrt{2}\,uc$, onde uc denota uma unidade de comprimento. Portanto, a área do triângulo ABC é igual a $12\,ua$, onde ua denota uma unidade de área.

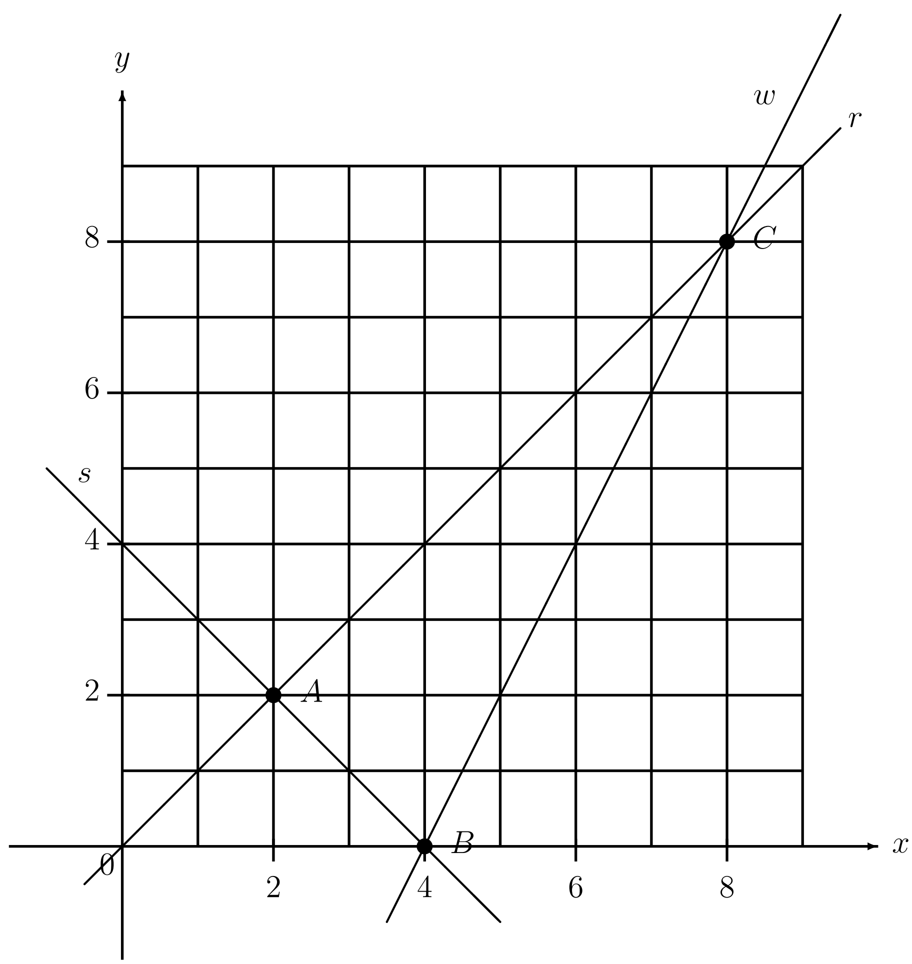

Figura 3: Representação gráfica da região da Questão 6.